# Interpolation

Alexander Pikovski

November 2001

**Zusammenfassung**

**Stichwörter:** Newton-Interpolation, dividierte Differenzen, Hermite-Interpolation, Interpolationspolynom, kubische Splines

Folgende Probleme werden behandelt:

1. Interpolation durch ein Polynom für vorgegebene Punkte und Ableitungen an diesen Punkten. Bei Hinzunahme neuer Punkte sollen möglichst wenig neue Berechnungen auszuführen sein.

2. Möglichst glatte Kurve durch vorgegebene Punkte.

## Inhaltsverzeichnis



# 1 Interpolation durch ein Polynom

## 1.1 Newton-Interpolation

Gegeben seien $n+1$ verschiedene Stützstellen $x_0, x_1, \dots x_n$ mit Funktionswerten $f_0, \dots f_n$. Die Reihenfolge der Stützstellen ist beliebig. Gesucht ist ein Polynom $n$-ten Grades, das durch alle Punkte $(x_i, f_i)$ geht. Man kann zeigen, dass dieses Polynom immer existiert und eindeutig ist (das *Interpolationspolynom*). Für dieses Polynom gibt es mehrere Darstellungsformen; hier wird das *Newton'sche Interpolationspolynom* mit *dividierten Differenzen* benutzt. Der Vorteil der Newton'schen Darstellung besteht darin, dass bei Hinzunahme einer neuen Stützstelle nur ein neuer Koeffizient neu berechnet wird, während alle anderen Koeffizienten erhalten bleiben.

Dazu definiert man rekursiv:

$$\begin{aligned} f[x_i] &:= f_i \\ f[x_i, x_{i+1}, \dots x_{i+k}] &:= \frac{f[x_{i+1}, \dots x_{i+k}] - f[x_i, \dots x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}. \end{aligned}$$

Die Größe $f[x_i, \dots x_{i+k}]$ heißt k-te dividierte Differenz. Die dividierten Differenzen hängen nur von den $x_i$ und $f_i$ ab, d. h. sie lassen sich für vorgegebene Stützstellen berechnen. Dazu ordnet man sie in einer Dreiecksmatrix an, so dass sich die Differenz aus den Nachbarn rechts und rechts oben ergibt:

$$\begin{array}{llll} \underline{f[x_0]} & & & \\ f[x_1] & \underline{f[x_0, x_1]} & & \\ f[x_2] & f[x_1, x_2] & \underline{f[x_0, x_1, x_2]} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \underline{\cdots} \end{array} \tag{1}$$

Die Koeffizienten des Newton-Polynoms $a_i$ stehen in der Hauptdiagonalen, sie sind unterstrichen dargestellt. Das Newton'sche Interpolationspolynom hat die Form

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}). \tag{2}$$

Man beachte, dass das nicht die übliche Polynomdarstellung mit aufsteigenden Potenzen ist.

## 1.2 Das Interpolationsproblem mit Ableitungen

Gegeben seien $m + 1$ Stützstellen $\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_m$ mit Funktionswerten sowie den Werten für Ableitungen an diesen Stellen. Genauer sind für jede Stützstelle $\bar{x}_i$ gegeben $y_i, y_i', \dots y_i^{(k_i)}$ mit $k_i \geq 0$. Dieses Interpolationsproblem wird auch als *Hermite-Interpolation* bezeichnet.

Für dieses Problem läßt sich das Newton-Verfahren der dividierten Differenzen anwenden. Dazu stellt man die vorgebenen Daten, wie im Abschnitt 1.1, als $n + 1$ Zahlenpaare $(x_0, f_0), \dots, (x_n, f_n)$ dar. Dabei geht man so vor: Sind an einer Stelle $\bar{x}_i$ insgesamt $k_i + 1$ Werte (Funktionwert und Ableitungen) vorgegeben, so erzeugt man $k_i + 1$ Punkte der Form $(\bar{x}_i, y), (\bar{x}_i, y^{(1)}), \dots (\bar{x}_i, y^{(k_i)})$. Dabei werden die entstandenen Paare nach der Stützstelle aufsteigend sortiert, d. h. es entstehen die Stützstellen $x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n$. Für das entstandene Problem lassen sich dividierte Differenzen nicht direkt berechnen, da manche Stützstellen mehrfach vorkommen. Betrachtet man aber dividierten Differenzen $f[x_i, \dots x_{i+l}]$ als Funktionen ihrer Variablen und setzt man voraus, dass $x_0 \leq \cdots \leq x_n$, dann kann man einen Grenzübergang durchführen, bei dem zwei (oder mehr) Variablen gleich werden und die Funktionen stetig ergänzen[1]. Dabei erhält man

$$f[\underbrace{x_i, x_i, \ldots, x_i}_{k\,\mathrm{mal}}] = \frac{f^{(k-1)}}{(k-1)!}.$$

Damit läßt sich die Matrix der dividierten Differenzen dort, wo die dividierten Differenzen nicht definiert sind, ausfüllen. Das sei an einem Beispiel verdeutlicht: Gegeben seien 3 Stützstellen $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2$, die Werte an diesen Stützstellen sowie die 1. Ableitung an der Stelle $\bar{x}_1$. Dann lautet die Matrix der dividierten Differenzen:

$$\begin{array}{r|llll}
\bar{x}_0 = x_0 & \underline{f[x_0]} & & & \\
\bar{x}_1 = x_1 & f[x_1] & \underline{f[x_0, x_1]} & & \\
\bar{x}_1 = x_2 & f[x_2] & \boxed{f[x_1, x_2]} & \underline{f[x_0, x_1, x_2]} & \\
\bar{x}_2 = x_3 & f[x_3] & f[x_2, x_3] & f[x_1, x_2, x_3] & \underline{f[x_0, x_1, x_2, x_3]}
\end{array}$$

Der umrahmte Wert ist die 1. Ableitung.

Wird ein neuer Punkt hinzugefügt, müssen mehrere Koeffizienten neu berechnet werden, da die Stützstellen aufsteigend sortiert sind.

### 1.3 Berechnung

Die Berechnung der Newton-Koeffizienten erfolgt nach dem oben beschriebenen Schema. Dabei wird eine Matrix angelegt und die Werte werden reihenweise von oben nach unten gefüllt. Befindet man sich an der Stelle $(i, j)$ in der Matrix und ist $f_i$ die $k$-te Ableitung an der Stelle $x_i$ (d. h. die Stützstelle $x_i$ wird zum $k-1$ mal wiederholt), dann lautet die Vorschrift:

$$A(i,j) = \begin{cases} f_i/k! & \text{wenn } k+1 = j \\ \frac{A(i,j-1) - A(i-1,j-1)}{x_i - x_{i-j}} & \text{wenn } k = 0 \text{ und } j \neq 1 \\ A(i, j-1) & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Auswertung des Polynoms erfolgt nach dem *Schema von Horner*, das Polynom wird in die Form gebracht

$$P(x) = [\cdots[[(x - x_{n-1})a_n + a_{n-1}](x - x_{n-2}) + a_{n-2}]\cdots] + a_0$$

und von "innen nach außen" ausgewertet.

## 2 Interpolation durch einen Spline

Gegeben seien $n+1$ sortierte Stützstellen $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ mit zugehörigen Funktionswerten $y_0, \ldots y_n$. Gesucht ist eine Kurve, nur im Intervall $[a, b]$, die durch diese Punkte möglichst glatt verläuft.

## 2.1 Die kubische Spline-Funktion

Ein *kubischer Spline* für ein Stützstellensystem $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ und zugehörige Funktionswerte ist eine 2-mal stetig differenzierbare Funktion, die auf jedem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ ein Polynom 3. Grades ist. Sie ist also aus $n$ kubischen Parabeln zusammengesetzt. Man kann zeigen, dass die Splinefunktion $S$ eindeutig bestimmt ist, falls man zusätzlich eine der folgenden Bedingungen vorgibt:

a) $S''(a) = S''(b) = 0$ (natürlicher Spline)

oder b) $S(a) = S(b)$, $S'(a) = S'(b)$ und $S''(a) = S''(b)$ (periodische Randbedingungen)

oder c) $S'(a) = y'_0$, $S'(b) = y'_n$ für fest vorgegebene $y'_0$, $y'_n$

Außerdem minimiert $S$ in jedem der drei Fälle unter allen anderen diese Bedingungen erfüllenden Funktionen $f$ das Integral

$$\int_a^b f''(x)^2 \, dx,$$

also ist $S$ die "glatteste" aller in Frage kommenden Kurven [1].

## 2.2 Berechnung der Spline-Funktion

Hier beschränken wir uns auf den oberen Fall a), d. h. wir fordern $S''(a) = S''(b) = 0$, die anderen Fälle findet man in [1]. In jedem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ ist $S$ ein Polynom 3. Grades. Kennt man die 2. Ableitungen von $S$ an jeder Stützstelle, die man als *Spline-Parameter*

$$M_i := S''(x_i) \tag{3}$$

bezeichnet, dann ist $S''$ eine lineare Funktion und sie läßt sich aus der Kenntnis von $x_{i-1}$, $x_i$ und $x_{i+1}$ berechnen. Mit den Werten $y_i$ und $y_{i+1}$ läßt sich die Spline-Funktion folgendermaßen schreiben:

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \quad \text{für } x \in [x_i, x_{i+1}] \tag{4}$$

mit

$$a_i = y_i, \quad b_i = \frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{2M_i + M_{i+1}}{6}\Delta x, \quad c_i = \frac{M_i}{2}, \quad d_i = \frac{1}{6}\frac{\Delta M}{\Delta x} \tag{5}$$

wobei

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta y = y_{i+1} - y_i \quad \text{und} \quad \Delta M = M_{i+1} - M_i.$$

Unter der Ausnutzung der Stetigkeit von $S'$ kann man die Parameter $M_i$ bestimmen. Wir hatten bereits in der Bedingung a) gesetzt

$$M_0 = 0, \qquad M_n = 0;$$

für die anderen Parameter ergibt sich ein symmetrisches *tridiagonales* lineares Gleichungssystem der Form

$$\begin{pmatrix} w_1 & \Delta^1 x & & & 0 \\ \Delta^1 x & w_2 & \Delta^2 x & & \\ & \Delta^2 x & w_3 & \Delta^3 x & \\ & & . & . & . \\ 0 & & & \Delta^n x & w_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ . \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ . \\ d_{n-1} \end{pmatrix} \tag{6}$$

mit

$$w_i = 2(x_{i+1} - x_{x-1}), \qquad d_i = 6(\frac{\Delta^i y}{\Delta^i x} - \frac{\Delta^{i-1} y}{\Delta^{i-1} x})$$

wobei

$$\Delta^i x = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta^{i-1} x = x_i - x_{i-1}, \quad \text{genauso für } y \text{ und } M.$$

Das Gleichungssystem (6) ist immer nichtsingulär [1] und wegen der tridiagonalen Form liefert der einfachste Gauß'sche Algorithmus gute Ergebnisse.

Zur Berechnung eines Splines löst man zuerst (6). Für jedes $x$ stellt man dann fest, in welchem Teilintervall der Stützstellen es liegt und berechnet mit (4) und (5) die Funktion $S(x)$.

## Literatur


[1] J. Stoer: *Einführung in die Numerische Mathematik I*, 4. Auflage, Springer 1983

[2] H. Press et al.: *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press 1992